## 1.4 Gradient, Divergenz und Rotation

Die Begriffe *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* erfordern die *partiellen Ableitung* aus Abschnitt 1.1.1 sowie das Konzept des Differentialoperators. Außerdem muß man zwischen skalaren und Vektorfunktionen unterscheiden.

### 1.4.1 Skalare Funktion

Eine Funktion $f$, deren Werte Skalare (also Zahlen, keine Vektoren oder andere Objekte) sind, heißt skalare Funktion. Sie kann von mehreren Variablen abhängen.

NB!

**BEISPIEL**

Beispiele für skalare Funktionen sind

$$f(x) = \sin(x) \qquad f(x,y) = x + y^2 \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$$

### 1.4.2 Vektorfunktion

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$, deren Werte Vektoren sind, heißt Vektorfunktion. Strenggenommen sind skalare Funktionen natürlich auch Vektorfunktionen der Dimension eins, so daß sie eine Art Spezialfall der Vektorfunktionen darstellen. Da der Gradient aber nur für eine skalare Funktion definiert ist, ist es wichtig, beide Begriffe zu kennen.

NB!

**BEISPIEL**

Beispiele für Vektorfunktionen sind

$$\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ zx \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \sin x_1 + 4 \\ \boldsymbol{x}^2 \\ 2 + x_3 + x_6 \end{pmatrix} .$$

### 1.4.3 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ ist ein vektorieller Differentialoperator. Das heißt nichts anderes, als daß er in Vektorform geschrieben werden kann und bei Anwendung auf eine Funktion eine Differential-„Operation“ durchführt, die mit Ableiten zu tun hat. Mit seiner Hilfe lassen sich Gradient, Divergenz und Rotation sehr einfach und geschickt schreiben. Man definiert ihn in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten $x, y, z$ als

NB!

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \qquad (1.28)}$$

Beispiele für die Anwendung des Nabla-Operator finden sich in den folgenden Abschnitten.

**Anmerkung:** In anderen Koordinatensystemen hat $\boldsymbol{\nabla}$ eine andere Form! Für Zylinderkoordinaten $\rho, \varphi, z$ und Kugelkoordinaten $r, \vartheta, \varphi$ hat er die Form

$$\boldsymbol{\nabla}_{\text{Zylinder}} := \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\text{Kugel}} := \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1.30}$$

Bei Anwendung dieser Operatoren darf man nicht vergessen, daß auch die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\vartheta$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ von den Variablen $\varphi$ und $\vartheta$ abhängen! Bildet man zum Beispiel die Divergenz eines Vektorfeldes $\boldsymbol{V} = V_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + V_\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + V_z \hat{\boldsymbol{e}}_z$ so hat man im entstehenden Skalarprodukt Terme wie

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} V_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho,$$

in denen die Ableitung nach $\varphi$ auch auf den hinten stehenden Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ angewendet werden muß. Dabei entstehen nach der Produktregel zwei Terme, wobei in einem die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ auftaucht. Am einfachsten ist es deshalb, in einem geeigneten Nachschlagewerk die vollständige Formel für Divergenz, Rotation oder andere, über den Nabla-Operator definierte Operatoren zu suchen.

### 1.4.4 Gradient

Ein Feld, dem eine skalare Funktion $f$ zugrunde liegt, ordnet jedem Punkt des Definitionsraumes von $f$ eine Zahl zu. Ein Beispiel für ein solches skalares Feld im dreidimensionale Raum wäre die Temperatur, die Dichte, oder das Potential, die an jedem Ort durch eine Zahl (plus Einheit) beschrieben werden können. Die Anwendung des Nabla-Operators auf $f$ ergibt ein Vektorfeld, das Gradient $\mathrm{grad}$ genannt wird. Der Gradient zeigt an jedem Punkt des Raumes in die Richtung des stärksten Anstiegs, sein Betrag gibt die Steigung in diese Richtung an. Ist das skalare Feld ein Potential, so gibt der negative Gradient des Feldes das zugehörige Kraftfeld an. Anschaulich klar ist das im Fall des Gravitationsfeldes: Ein Körper fällt in die Richtung, in der die Änderung seines Potentiales maximal ist.

$$\boxed{\mathrm{grad}\, f(x,y,z) := \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} \qquad (1.31)}$$

NB!

**BEISPIEL**

$$f(x,y,z) = x + y + 1 \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht sehr schön, daß in diesem Fall der Gradient nicht von den Koordinaten abhängt – nicht verwunderlich, da es sich hierbei um eine Ebene handelt. Außerdem verläuft der Gradient entlang der Winkelhalbierenden der $x$-$y$-Ebene, was ja gerade die Richtung des größten Anstiegs ist. Der Betrag des Gradienten ist $\sqrt{2}$, dies entspricht der Steigung in dieser Richtung.

Ein zweites Beispiel:

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^3 + \cos(z) - 4xy$$
$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 4y \\ 9y^2 - 4x \\ -\sin(z) \end{pmatrix}$$

**Anmerkung:** Man kann auch einen Gradienten für Vektorfelder definieren, den sogenannten Vektorgradienten. Er hat die Form einer Matrix, und ergibt bei Anwendung auf einen Vektor wiederum einen Vektor. In 3D-euklidischen Koordinaten hat er die Form

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} . \tag{1.33}$$

### 1.4.5 Divergenz

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ ergibt über das Skalarprodukt $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}$ ein skalares Feld, das in jedem Punkt des Raumes angibt, ob dort Feldlinien entstehen oder verschwinden. Am Ort einer positiven Punktladung wäre die Divergenz des elektrischen Feldes beispielsweise größer als Null, da an diesem Punkt Feldlinien entstehen. Punkte mit positiver Divergenz werden Quellen genannt, Punkte mit negativer Divergenz dagegen Senken. Die Abbildung 2 zeigt einen möglichen Feldlinien für eine Quelle, bei einer Senke ist lediglich die Richtung der Vektoren entgegengesetzt.

NB!

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z) := \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z \tag{1.34}$$

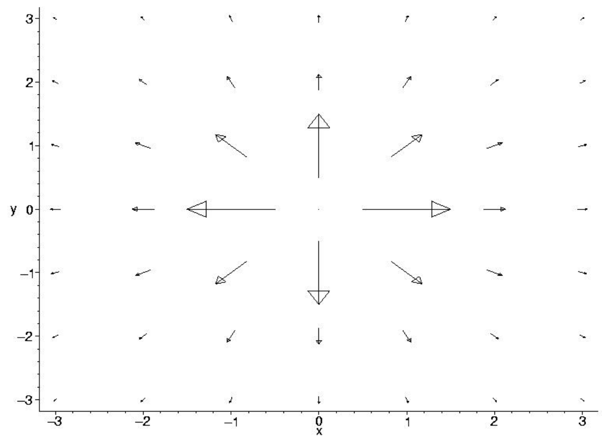


Abbildung 2: Feldlinienverlauf bei positiver Divergenz

**BEISPIEL**

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Jeder Punkt dieses Feldes stellt also eine Quelle dar. Die Feldlinien sind alle nach außen orientiert und nehmen mit zunehmender Entfernung zum Ursprung betragsmäßig zu. Das Feld ist in Abbildung 3 skizziert.

**Anmerkung:** Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist die Divergenz des magnetischen Feldes immer null, da es keine magnetischen Monopole gibt und die Feldlinien deshalb immer geschlossen sind. Diese Tatsache wird durch die Gleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

beschrieben, die eine der vier MAXWELL-Gleichungen ist und damit zu den grundlegendsten Eigenschaften der Elektrodynamik gehört.

### 1.4.6 Rotation

Neben dem Skalarprodukt können zwei Vektoren auch über das Kreuzprodukt miteinander verknüpft werden. Bildet man $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{f}$, so erhält man eine Vektorfunktion, die Rotation genannt wird

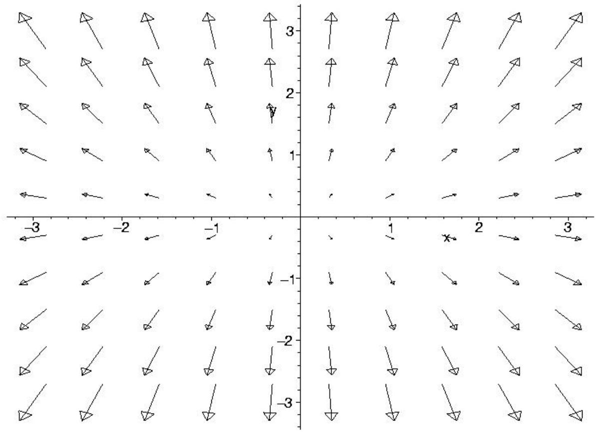


Abbildung 3: Der Feldlinienverlauf der im Beispiel verwendeten Funktion $\boldsymbol{f}$

und die die Wirbel von $\boldsymbol{f}$ charakterisiert. Betrachtet man etwa das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes, wie es in Abbildung 4 dargestellt ist, so erkennt man deutlich die Wirbel des magnetischen Feldes senkrecht zur Stromrichtung. Ein hypothetischer magnetischer Monopol würde beim Umlauf um den Draht in einer Richtung Energie gewinnen, in der anderen Richtung immer Energie verlieren. Die Arbeit, die verrichtet werden muß, um einen solchen Monopol von einer Stelle zur anderen zu bringen, wäre also wegabhängig. Das bedeutet, daß das zugrundeliegende Feld kein konservatives Kraftfeld ist und kein skalares Potential existiert, aus dem man durch Gradientenbildung das Kraftfeld erhalten könnte. Ganz allgemein gilt, daß die Rotation genau dann null ist, wenn ein konservatives Kraftfeld vorliegt. Äquivalent ist auch die Aussage, daß ein skalares Potential existiert.

NB!

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y \\ \frac{\partial}{\partial z} f_x - \frac{\partial}{\partial x} f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y} f_x \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

**BEISPIEL**

Sei $\boldsymbol{f}$ ein Vektorfeld der Form

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

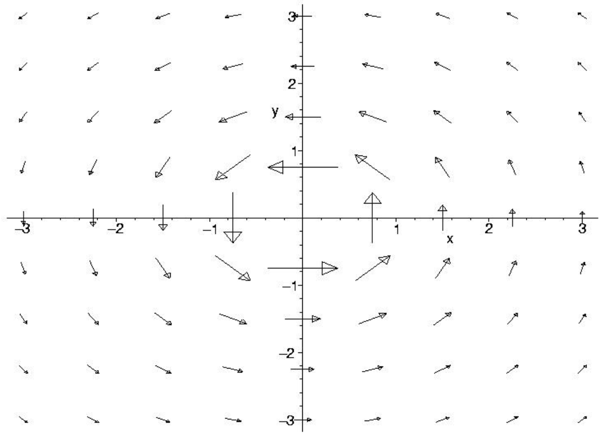


Abbildung 4: Magnetfeldlinienverlauf um einen stromdurchflossenen Draht

Dann gilt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Man sieht, daß die Rotation hier an jedem Punkt des Raumes konstant ist und senkrecht zur Ebene der Wirbel steht.

## 1.5 Warum zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs?

Die Richtung des größten Anstiegs einer Funktion mehrerer Veränderlicher ist die Richtung mit der größten Richtungsableitung. Formen wir mit der aus der Vektorrechnung bekannten Beziehung

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})), \tag{1.36}$$

wobei $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ der Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist, den wir im folgenden mit $\varphi$ bezeichnen, die Richtungsableitung aus Gleichung (1.26) auf Seite 14 um, so können wir leicht erkennen, wann der größte Wert angenommen wird. Wir erinnern uns daran, daß $|\boldsymbol{a}| = 1$.

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \underbrace{|\boldsymbol{a}|}_{=1} |\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)| \cos\varphi = |\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)| \cos\varphi \tag{1.37}$$

Da der Gradient von der Richtung unabhängig ist, stellt $\varphi$ die einzige Richtungsabhängigkeit dar. Der maximale Wert wird für

$$\cos(\varphi) = 1 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0 \tag{1.38}$$

angenommen, also genau dann, wenn $\boldsymbol{a}$ parallel zum Gradienten steht. Das heißt die Richtung des Gradienten ist die Richtung des größten Wertes für die Richtungsableitung und somit die Richtung des stärksten Anstiegs. Entsprechend gibt der negative Gradient die Richtung des stärksten Abfalls an.

Die Steigung der Richtungsableitung hat hier ($\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)|}$) übrigens den Wert

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)|} \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0))^2}{|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)|} = |\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)|. \tag{1.39}$$

**BEISPIEL**

Welches ist die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sqrt{x_2} \tag{1.40a}$$

an der Stelle

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.40b}$$

und wie groß ist diese Steigung?

Lösung:

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_{2,0}} \\ \frac{x_{1,0}}{2\sqrt{x_{2,0}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\tilde{\boldsymbol{a}}}{|\tilde{\boldsymbol{a}}|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.40c}$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{a}} \overset{(1.39)}{=} |\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)| = |\tilde{\boldsymbol{a}}| = \frac{\sqrt{34}}{4} \tag{1.40d}$$