

# Auswerteprotokoll der Versuche

## Luftdruckmessung und Barometrische Höhenmessung

Markus Engelhardt

2005-06-30

Versuchstag: 2005-05-25

Versuchszeit: 14:30 bis 17:00 Uhr

Betreuer: Stefan Versick

Die Durchführung des Versuches erfolgte gemeinsam mit *Katrin Zink*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Luftdruckmessung</b>	<b>3</b>
1.1	Allgemeine Einführung . . . . .	3
1.2	Versuchsdurchführung . . . . .	3
1.2.1	. . . . .	3
1.2.2	. . . . .	3
1.2.3	. . . . .	3
1.3	Fragen und Aufgaben . . . . .	4
1.3.1	. . . . .	4
1.3.2	. . . . .	4
1.3.3	. . . . .	4
1.3.4	. . . . .	6
1.3.5	. . . . .	7
1.3.6	. . . . .	7
1.3.7	. . . . .	8
1.3.8	. . . . .	8
1.3.9	. . . . .	9
1.3.10	. . . . .	10
1.3.11	. . . . .	10
1.3.12	. . . . .	11
1.4	Auswertung der Messungen . . . . .	11
1.4.1	. . . . .	11
1.4.2	. . . . .	13
<b>2</b>	<b>Barometrische Höhenmessung</b>	<b>14</b>
2.1	Allgemeine Ausführungen . . . . .	14
2.2	Durchführung des Versuches . . . . .	14
2.2.1	. . . . .	14
2.2.2	. . . . .	14
2.2.3	. . . . .	15
2.2.4	. . . . .	15
2.3	Fragen und Aufgaben . . . . .	16
2.3.1	. . . . .	16
2.3.2	. . . . .	16
2.3.3	. . . . .	16
2.3.4	. . . . .	17
2.3.5	. . . . .	18
2.4	Auswertung der Messungen . . . . .	18
2.4.1	. . . . .	18
2.4.2	. . . . .	19
2.4.3	. . . . .	19
2.4.4	. . . . .	20

# 1 Luftdruckmessung

## 1.1 Allgemeine Einführung

siehe Beschreibung zum Versuch Luftdruckmessung!

## 1.2 Versuchsdurchführung

### 1.2.1

- a) Der Ablesemaßstab am Stationsbarometer weist eine [mm]-Skalierung auf. Bei der mittleren Erdbeschleunigung von  $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$  entspricht der Druck einer 1 mm Quecksilbersäule 1 Torr, bzw. 1.33322 hPa.
- b) Die Maßstabsskala ist bei einer Temperatur von  $\vartheta = 20^\circ C$  ( $T = 293 K$ ) längenrichtig.

### 1.2.2

Die Quecksilbersäulenhöhe am Stationsbarometer beträgt 757,5 mm.

Dies entspricht einem Druck von 757,5 Torr, bzw. 1009,9 hPa.

Die Ablesegenauigkeit wird mit 0,1 mm abgeschätzt, was einer Druckungenauigkeit von  $\pm 0,1$  hPa entspricht.

Die Temperatur am Messgerät beträgt  $\vartheta = 28,0^\circ C$ , bei einer Ableseungenauigkeit von  $\pm 0,5^\circ C$ .

### 1.2.3

Mittels eines Assmannschen Aspirationspsychrometers wird die Luft- und Feuchttemperatur auf dem Dach des Physikhochhauses, sowie in 1,5 m Höhe über dem Boden im Niveau des Universitätsgeländes gemessen.

Hierbei ergeben sich folgende Messwerte:

	<u>Dach des Physikhochhauses</u>	<u>1,5 m über dem Boden</u>
<u>Lufttemperatur:</u>	27,4°C	25,7°C
<u>Feuchttemperatur:</u>	15,0°C	14,7°C

Hierbei beträgt die Messungenauigkeit jeweils  $\pm 0,1^\circ C$ .

## 1.3 Fragen und Aufgaben

### 1.3.1

Unter dem Begriff Druck versteht man eine systemeigene intensive physikalische Zustandsgröße.

Der Druck  $p$  beschreibt den Quotienten einer Kraft  $F$  und der Fläche  $A$ , auf die diese Kraft senkrecht wirkt.

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$p = \frac{F}{A}$$

Seine abgeleitete SI-Einheit ist das Pascal mit dem Einheitenzeichen Pa. Ein Pascal entspricht einem Druck von einem Newton pro Quadratmeter:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

Die zusätzlich oft gebräuchliche Druckeinheit Bar entspricht 100.000 Pa, 1000 hPa oder 100 kPa.

Eine weitere teilweise noch zu findende, veraltete Druckeinheit ist das Torr.

### 1.3.2

1 Torr ist genau der Druck, den eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe auf die darauf bezogene Fläche  $A$  bei mittlerer Erdbeschleunigung ( $g = 9,806665 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ) ausübt.

Somit ergibt sich (mit einer Quecksilberdichte von  $\rho_{Hg} = 13,5951 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ):

$$\begin{aligned} 1 \text{ Torr} &= \frac{m_{Hg} \cdot g}{A} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \frac{V}{A} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = \\ 13,5951 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,806665 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,001 \text{ m} &= 133,322 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,33322 \text{ hPa} \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt:

$$1 \text{ Torr} = 1,3332 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ hPa} = 0,7501 \text{ Torr}$$

### 1.3.3

- a) Der Luftdruck, der aus der Messung mit einem Quecksilberbarometer bestimmt wird, berechnet sich mit Hilfe der Formel

$$p_L = g \cdot \rho_{Hg} \cdot h \quad (1)$$

Hierbei ist  $p_L$  der Luftdruck,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\rho_{Hg}$  die Dichte des Quecksilbers und  $h$  die Höhe der Quecksilbersäule.

Die Ergebnisse für den Luftdruck, unterliegen verschiedenen temperatur- und messortbedingten Abweichungen.

So ist die Erdbeschleunigung  $g$  von der geographischen Breite, sowie der Höhe des Messortes abhängig:

$$g = g(\phi, z) = (1 - \beta_\phi \cos(2\phi) - \beta_z z)g_0 \quad (2)$$

Hierbei ist  $\phi$  die geographische Breite,  $z$  die Höhe über Normal Null (NN),  $\beta_\phi$  und  $\beta_z$  Korrekturkonstanten mit den Zahlenwerten  $\beta_\phi = 2,637 \cdot 10^{-3}$  und  $\beta_z = 1,95 \cdot 10^{-7}$  und  $g_0$  der Wert der Erdbeschleunigung für die geographische Breite von  $45^\circ$  und der Höhe NN.

Für den Wert von  $g_0$  gilt:

$$g_0 = g(45^\circ, 0) = 9,8064 \frac{m}{s^2} \quad (3)$$

Auch die Dichte  $\rho_{Hg}$  des Quecksilbers ist nicht unabhängig von den Messbedingungen, sondern ist eine Funktion der Temperatur des Quecksilbers:

$$\rho_{Hg} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta\vartheta} \quad (4)$$

Hierbei ist  $\rho_0$  die Dichte bei der Bezugstemperatur  $\vartheta_0$ , bei der das Barometer kalibriert wurde,  $\gamma$  der kubische Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber mit dem Wert  $\gamma = 1,82 \cdot 10^{-4} \frac{1}{K}$ , und  $\Delta\vartheta$  die Differenz aus der (aktuellen) Temperatur  $\vartheta$  des Quecksilbers und der Temperatur  $\vartheta_0$ .

Der Wert von  $\vartheta_0$  wird sehr oft mit  $\vartheta = 20^\circ C$  gewählt. Dann ist:

$$\rho_0 = \rho(20^\circ C) = 13,5457 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m^3} \quad (5)$$

Eine weitere temperaturabhängige Korrektur, die an einem Quecksilberbarometermesswert vorgenommen werden muss, ist die Korrektur der Ablese skala der Quecksilbersäulenhöhe, da sich die Skala auf dem Ablesestab mit dessen Temperaturänderung ebenfalls verändert.

Bei einem üblichen Stationsbarometer mit nur einem ablesbaren Quecksilberniveau ist eine weitere Korrektur anzubringen, und zwar für die Kapillar depression. Darunter versteht man die Höhendifferenz  $h_{Kd}$  der Flüssigkeitshöhen zwischen einem engen Rohr und einem (sehr) weitem Rohr. Für sie gilt:

$$h_{Kd} = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad (6)$$

Hierbei ist  $\sigma$  die Oberflächenspannung der Flüssigkeit in der Kapillare,  $\alpha$  der Winkel zwischen der Wand der Kapillare und dem Verlauf der Flüssigkeitsoberfläche in Wandnähe,  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $r$  der Radius der Kapillare.

- b) Darüber hinaus muss noch die Reduktion des Messwertes auf Normal Null (NN) vorgenommen werden, damit die Messwerte von unterschiedlichen Stationen untereinander verglichen werden können. Ohne diese Reduktion würde man nur ein angenähertes, für die Meteorologie uninteressantes, Bild der Orographie erhalten. Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel erhält man für den auf NN reduzierten Luftdruck  $p_0$ :

$$p_0 = p + p \cdot \left[ e^{\frac{gz}{R_L T_m}} - 1 \right] \quad (7)$$

Hierbei ist  $p$  der in der Höhe  $z$  über NN herrschende Luftdruck,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $R_L$  die Gaskonstante für Luft und  $T_m$  die mittlere Lufttemperatur zwischen der Höhe  $z$  und NN.

Letztere berechnet sich zu

$$T_m = \frac{T + T_0}{2}, \quad (8)$$

wobei  $T$  die Lufttemperatur in der Höhe  $z$  ist, und  $T_0$  die potentielle Temperatur in der Höhe NN, die sich aus der Temperatur  $T$  der Höhe  $z$  und dem mittleren Temperaturgradienten  $\frac{dT}{dz}$  berechnet.

### 1.3.4

Ein Aneroidbarometer (Dosenbarometer) misst den Luftdruck über die Höhe einer elastischen weitgehend evakuierten Metalldose. Sie ist somit unabhängig von der Erdbeschleunigung. Da die Elastizität des Metalles von der Temperatur abhängig ist, wird in der Dose eine geringe Gasfüllung belassen, um den Temperatureinfluss zu kompensieren.

Eine Reduktion des Messwertes auf NN ist natürlich auch beim Aneroidbarometer unerlässlich.

- a) Der Term, der die Korrektur der Ableseskala der Quecksilbersäulenhöhe beschreibt, ist gegeben durch:

$$h_0 = h_\vartheta(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta) \quad (9)$$

Hierbei ist  $h_0$  die längenrichtige Ablesung,  $h_\vartheta$  die temperaturbeeinflusste Ablesung bei der Temperatur  $\vartheta$  (in Grad Celsius) und  $\alpha$  der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient der Maßstabsskala.

Durch Auflösen der Gleichung nach  $\Delta\vartheta$  erhält man:

$$\Delta\vartheta = \frac{h_0}{h_\vartheta\alpha} - \frac{1}{\alpha} \quad (10)$$

Man erkennt sofort, dass die Größen  $\Delta\vartheta$  und  $h_\vartheta$  indirekt proportional sind ( $\Delta\vartheta \propto \frac{1}{h_\vartheta}$ ). Dies bedeutet, dass mit zunehmender Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  die Größe  $h_\vartheta$  kleiner wird.

- b) Zur Bestimmung der Länge eines Gegenstandes bei einer bestimmten Temperatur  $t$  verwendet man folgende Formel:

$$h_t = h_0(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta) \quad (11)$$

Während somit Gleichung (9) die tatsächliche Länge eines Gegenstandes auf eine Länge bei einer Referenztemperatur umrechnet, berechnet man mit Hilfe von Gleichung (11) die tatsächliche Länge eines Gegenstandes ausgehend von einer bekannten (meist auf  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$  bezogenen) Referenzlänge.

Beide Gleichungen sind somit vollkommen korrekt und widersprechen sich keineswegs.

### 1.3.5

Folgende Skizze zeigt ein Stationsmodell einer typischen Synopstation aus einer Bodenwetterkarte:

- b) Der aktuelle Druck ist hier 1002,5 hPa, er ist um 0,5 hPa gestiegen; die Tendenz ist steigend; die Tendenz bezieht sich auf die letzten 3 Stunden

### 1.3.6

Zur Herleitung von Gleichung (1) geht man von einem Kräftegleichgewicht zwischen den Gewichtskräften aus Quecksilber und Luft aus:

$$F_g(Hg) = F_L = p_L \cdot A \quad (12)$$

Hierbei ist  $F_g(Hg)$  die Gewichtskraft des Quecksilbervolumens  $V$ , welches sich über der Oberfläche der Quecksilbersäule in der offenen Kapillare befindet,  $F_L$  die Gewichtskraft der Luft, die einen Druck auf das Quecksilber ausübt,  $p_L$  der Luftdruck und  $A$  der Querschnitt der Kapillare.

Mit  $F_g(Hg) = m_{Hg} \cdot g = \rho_{Hg} \cdot V \cdot g$  folgt:

$$\rho_{Hg} \cdot V \cdot g = p_L \cdot A \quad (13)$$

Nach Auflösen nach dem dem Luftdruck  $p_L$  folgt:

$$p_L = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \frac{V}{A} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \quad (14)$$

### 1.3.7

Der Dampfdruck von Quecksilber ist bei Zimmertemperatur sehr gering, und liegt weit unterhalb von 0,01 hPa. Somit kann die Bildung der so genannten Quecksilberatmosphäre in diesem Temperaturbereich ohne Bedenken vernachlässigt werden.

Nicht zu vernachlässigen wäre ein Dampfdruck von mehr als 0,1 hPa, der aber erst ab einer Temperatur von etwa 80°C erreicht wird, und somit meteorologisch nicht relevant ist.

Der Quecksilberdampfdruckwert beträgt (*nach: EG - Sicherheitsdatenblatt, siehe Anhang*):

- bei 20°C:  $0,0017 \text{ mbar} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ hPa}$
- bei 30°C:  $0,0039 \text{ mbar} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ hPa}$

### 1.3.8

Zur Herleitung der Korrekturgleichung für die Luftdruckmessung mit Hilfe eines Quecksilberbarometers geht man von Gleichung (1) aus. Hier setzt man für die Erdbeschleunigung  $g$  die Gleichung (2) ein, um deren Breiten- und Höhenabhängigkeit zu berücksichtigen. Für die Dichte des Quecksilbers  $\rho_{Hg}$  setzt man die Gleichung (4) ein, um deren Temperaturabhängigkeit zu berücksichtigen. Schließlich wird auch die Höhendifferenz  $h$  der beiden Quecksilberoberflächen ersetzt, um die Temperaturabhängigkeit des Ablesemaßstabes zu erfassen. Hierfür gilt:

$$h = (1 + \alpha \Delta\vartheta) \cdot h_{ab}$$

Durch Einsetzen der Korrekturterme kommt man auf folgende Gleichung:

$$p_L = \frac{(1 - \beta_\phi \cos(2\phi) - \beta_z z)(1 + \alpha \Delta\vartheta)}{1 + \gamma \Delta\vartheta} \cdot g_0 \rho_0 h_{ab} \quad (15)$$

Diese Gleichung wird nun ausmultipliziert.

Außerdem wird für einen mit einer Druckskala versehenen Maßstab der abgelesene Druckwert  $p_{ab} = g_0 \rho_0 h_{ab}$  definiert.

Somit ergibt sich:

$$\Delta p_{\vartheta, \phi, z} = p_L - p_{ab} = \frac{1 - \beta_\phi \cos(2\phi) - \beta_z z + \alpha \Delta\vartheta - \overbrace{\alpha \beta_\phi \Delta\vartheta \cos(2\phi)}^{\approx 0} - \overbrace{\alpha \beta_z \Delta\vartheta z}^{\approx 0} - 1 - \gamma \Delta\vartheta}{1 + \gamma \Delta\vartheta} \cdot p_{ab} \quad (16)$$

Durch Vernachlässigung von Korrekturgliedern höherer Ordnung erhält man folgende vereinfachte Gleichungen:

$$\Delta p_{\vartheta,\phi,z} + \overbrace{\gamma \Delta \vartheta \Delta p_{\vartheta,\phi,z}}^{\approx 0} = [-\beta_\phi \cos(2\phi) - \beta_z z + \alpha \Delta \vartheta - \gamma \Delta \vartheta] \cdot p_{ab} \quad (17)$$

bzw.

$$\Delta p_{\vartheta,\phi,z} = p_L - p_{ab} = -[(\gamma - \alpha)\Delta \vartheta + \beta_\phi \cos(2\phi) + \beta_z z] \cdot p_{ab} \quad (18)$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte für die Konstanten erhält man schließlich die Korrekturgleichung:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\vartheta,\phi,z} = p_L - p_{ab} = \\ - \underbrace{[1,63 \cdot 10^{-4} K^{-1} \cdot \Delta \vartheta]}_{K_t} + \underbrace{[2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2\phi)]}_{K_\phi} + \underbrace{[1,95 \cdot 10^{-7} m^{-1} \cdot z]}_{K_z} \cdot p_{ab} \\ = K_t + K_\phi + K_z \end{aligned} \quad (19)$$

Hierbei ist  $K_t$  die Temperaturkorrektur,  $K_\phi$  die Breitenkorrektur und  $K_z$  die Höhenkorrektur.

### 1.3.9

- a) Die Schwerekorrektur  $g(\phi, z)$  lässt sich in eine zusätzliche Temperaturkorrektur  $A$  umrechnen. Für sie gilt:

$$A = - \frac{\Delta p_{\vartheta,\phi,z}}{1,63 \cdot 10^{-4} \cdot p_{ab}} - \Delta \vartheta \quad (20)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (18) ergibt sich:

$$A = \frac{2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2\phi) + 1,95 \cdot 10^{-7} m^{-1} \cdot z}{1,63 \cdot 10^{-4}} \quad (21)$$

- b) Für den Barometerstandort Karlsruhe ( $\phi = 49^\circ$ ,  $z = 165m$  ü. NN) ergibt sich diese Temperaturkorrektur zu:

$$A = \frac{2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2 \cdot 49^\circ) + 1,95 \cdot 10^{-7} m^{-1} \cdot 165 m}{1,63 \cdot 10^{-4}} = -2,05 \text{ } ^\circ C$$

- c) Die Umrechnung der Schwerekorrektur in die zusätzliche Temperaturkorrektur  $A$  bewirkt, dass die Abhängigkeit von der Erdbeschleunigung, und somit von der geographischen Breite und der Höhe, durch eine Temperaturkorrektur ausgedrückt werden kann. Die Anzahl der Korrekturterme ist dadurch auf einen einzigen, den für die Temperatur, reduziert.

### 1.3.10

Die geopotentielle Höhe  $Z$  berechnet sich aus

$$Z = \frac{g(\phi, z) \cdot z}{g_{45}} = \frac{(1 - \beta_\phi \cos(2\phi) - \beta_z z)g_{45} \cdot z}{g_{45}} \quad (22)$$

Hierbei ist  $g(\phi, z)$  die von der geographischen Breite  $\phi$  und der geometrischen Höhe  $z$  abhängige Erdbeschleunigung (siehe Gleichung (2)).

Nach Auflösen nach der geometrischen Höhe  $z$  erhält man:

$$z = \frac{1 - \beta_\phi \cos(2\phi) \pm \sqrt{(\beta_\phi \cos(2\phi) - 1)^2 - 4\beta_z Z}}{2\beta_z} \quad (23)$$

Für eine geopotentielle Höhe von  $Z = 5000 \text{ gpm}$  ergibt sich für die geometrische Höhe  $z$ :

- am Pol ( $\phi = 90^\circ$ ):  $z = 4992 \text{ m}$
- in Karlsruhe ( $\phi = 49^\circ$ ):  $z = 5003 \text{ m}$
- am Äquator ( $\phi = 0^\circ$ ):  $z = 5018 \text{ m}$

Anmerkung:

Würde man in Gleichung (22) die Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der geometrischen Höhe  $z$  vernachlässigen, um sich eine quadratische Gleichung für  $z$  zu ersparen, so erhielte man jeweils ein Ergebnis, das um  $8 \text{ m}$  unter den hier berechneten Werten läge.

Dies ist in Anbetracht der ohnehin sehr geringen Unterschiede zwischen geopotentiellen Metern und geometrischen Metern ein nicht zu vertretender Fehler.

### 1.3.11

Für den Wert  $h = 750 \text{ mm}$  eines Stationsbarometers und der Temperatur  $\vartheta = 15^\circ\text{C}$  für das Quecksilber und der Luft ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (19) für den Luftdruck:

$$p = 750 \text{ Torr} \cdot (1 - 2,445 \cdot 10^{-3} - 2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2\phi) - 1,95 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot z)$$

- a) Für die drei folgenden Orte resultiert aus den gegebenen Bedingungen folgender Luftdruck:

am Pol (in NN):  $999,9 \text{ hPa}$   
 in Karlsruhe (120 m ü. NN):  $997,6 \text{ hPa}$   
 am Äquator (in NN):  $994,7 \text{ hPa}$

- b) Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich der Luftdruck für Karlsruhe auf Normal Null umrechnen. Dazu benötigt man die mittlere Temperatur  $T_m$ . Bei einem Temperaturgradienten von  $0,65 \frac{K}{100 \text{ m}}$  und einer Höhe von  $z = 120 \text{ m}$  ergibt sich diese Temperatur zu:

$$\begin{aligned} T_m &= T + 0,00325 \cdot z = \\ &= 273,15 \text{ K} + 15 \text{ K} + 0,00325 \frac{\text{K}}{\text{m}} \cdot 120 \text{ m} = \underline{288,93 \text{ K}} \end{aligned}$$

Für den reduzierten Luftdruck ergibt sich somit:

$$p = 997,6 \text{ hPa} + 997,6 \text{ hPa} \cdot \left[ e^{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 120 \text{ m}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 288,93 \text{ K}}} - 1 \right] = \underline{1011,9 \text{ hPa}}$$

### 1.3.12

Um mit einem so genannten Wasserbarometer den Luftdruck zu bestimmen bräuchte man eine Wassersäule mit einer Höhe von:

$$h = \frac{p}{\rho_{H_2O} \cdot g} = \frac{1013 \text{ hPa}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{10,33 \text{ m}}$$

Es muss die Annahme zugrunde gelegt werden, dass kein Wasserdampf in das Vakuum verdampft.

## 1.4 Auswertung der Messungen

### 1.4.1

- a) Der Luftdruck, der an dem Quecksilberbarometer im Synoptikraum angezeigt wird, ist  $p_{ab} = 757,5 \text{ Torr}$ .  
 Mit Hilfe von Korrekturtabellen wird der Einfluss der Messortbedingungen ( $\vartheta = 28^\circ\text{C}$ ,  $\phi = 49^\circ$ ,  $z = 165 \text{ m}$ ) bestimmt. Hierbei folgt für

die Temperatur ein Korrekturwert von  $K_t = -3,57$  Torr, für die geographische Breite  $K_\phi = 0,31$  Torr, für die Höhe  $K_z = -0,02$  Torr und für die Kuppelhöhe ein Korrekturwert von  $K = 0,45$  Torr.

Somit ergibt sich für den korrigierten Wert des Luftdruckes:

$$p = 754,7 \text{ Torr} = \underline{1006,1 \text{ hPa}}$$

Anstelle die Korrekturwerte in den jeweiligen Tabellen nachzuschlagen, können diese mit Ausnahme der Kapillardepressionskorrektur auch mit Hilfe von Gleichung (17) berechnet werden. Hierbei muss besonders auf unterschiedliche Temperaturwerte für die Eichtemperatur des Maßstabes ( $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$ ) und der Bezugstemperatur für die Dichte des Quecksilbers ( $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ ) Rücksicht genommen werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_t &= (\gamma\Delta\vartheta - \alpha\Delta\vartheta) \cdot p_{ab} = \\ &= (1,82 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \cdot 28 \text{ K} - 0,19 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \cdot 8 \text{ K}) \cdot 757,5 \text{ Torr} = \\ &= -3,75 \text{ Torr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_\phi &= \beta_\phi \cdot \cos(2\phi) \cdot p_{ab} = \\ &= 2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2 \cdot 49^\circ) \cdot 757,5 \text{ Torr} = \\ &= 0,28 \text{ Torr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_z &= \beta_z z \cdot p_{ab} = \\ &= 1,95 \cdot 10^{-7} \cdot 165 \text{ m} \cdot 757,5 \text{ Torr} = \\ &= -0,02 \text{ Torr} \end{aligned}$$

Somit erhält man für den korrigierten Luftdruck:

$$p = 754,5 \text{ Torr} = \underline{1005,9 \text{ hPa}}$$

Man erhält durch die Berechnung einen geringen Unterschied im Ergebnis für den Luftdruck. Dieser Unterschied resultiert im Wesentlichen von den diskreten Werten der Korrekturtabelle und in Rundungsfehlern.

- b) Da in der Herleitung von Gleichung (17) die Korrekturglieder höherer Ordnung vernachlässigt worden sind, wird der Luftdruck nun aus Gleichung (1) berechnet. Dabei werden die Erdbeschleunigung  $g$ , die Dichte des Quecksilbers  $\rho_{Hg}$ , sowie die Höhendifferenz  $h$  mit Hilfe der Gleichungen (2) (4) und (9) einer Breiten-, Höhen- bzw. Temperaturkorrektur unterzogen.

Für die Erdbeschleunigung ergibt sich ein Wert von

$$\begin{aligned} & g(49^\circ, 165 \text{ m}) = \\ & = (1 - 2,637 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2 \cdot 49^\circ) - 1,95 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m} \cdot 165 \text{ m}) 9,8064 \frac{m}{s^2} = \\ & = 9,8097 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Für die Dichte des Quecksilbers ergibt sich ein Wert von

$$\rho_{Hg} = \frac{13,5457 \frac{g}{cm^3}}{1 + 1,82 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \text{ K}} = 13,5260 \frac{g}{cm^3} = 13526 \frac{kg}{m^3}$$

Für die Höhendifferenz ergibt sich ein Wert von

$$h = (1 + 0,19 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \text{ K}) \cdot 757,5 \text{ mm} = 0,7576 \text{ m}$$

Zusätzlich muss für die Berechnung des Luftdruckes noch die Kapillardepresion berücksichtigt werden. Diese besitzt einen Wert von 0,45 Torr bzw. 0,6 hPa.

Hieraus berechnet sich der Luftdruck zu

$$p_L = 9,8097 \frac{m}{s^2} \cdot 13526 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,7576 \text{ m} + 0,6 \text{ hPa} = \underline{1005,8 \text{ hPa}}$$

- c) Der Unterschied zu dem in Punkt 4.1a berechneten Wert für den Luftdruck beträgt nur 0,1 hPa. Damit zeigt sich, dass die Vernachlässigung der Korrekturglieder höherer Ordnung bei der Herleitung von Gleichung (17) geringere Auswirkungen auf das Ergebnis besitzt als die im Rahmen der Messgenauigkeiten ermittelten Werte.

#### 1.4.2

- a) Für die Reduktion des in Punkt 1.4.1a berechneten Luftdruckes auf das Niveau des Universitätsgeländes (115 m ü. NN) verwendet man Gleichung (7). Dazu benötigt man wieder die mittlere Temperatur  $T_m$ . Diese ergibt sich aus den gemessenen Temperaturwerten zu:

$$T_m = 273,15 \text{ K} + \frac{27,4 + 25,7}{2} \text{ K} = 299,7 \text{ K}$$

Es ergibt sich:

$$p(\text{Universitätsgelände}) = 1006,1 \text{ hPa} + 1006,1 \text{ hPa} \cdot \left[ e^{\frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 50 \text{ m}}{287 \frac{J}{kgK} \cdot 299,7 \text{ K}}} - 1 \right] = \underline{1011,9 \text{ hPa}}$$

- b) Für die Reduktion des Druckes auf Normal Null (NN) ergibt sich bei einem Temperaturgradienten von  $0,65 \frac{K}{100 \text{ m}}$  und einer Höhe von  $z = 120 \text{ m}$  eine mittlere Temperatur von:

$$\begin{aligned} T_m &= T + 0,00325 \cdot z = \\ &= 273,15 \text{ K} + 25,7 \text{ K} + 0,00325 \frac{K}{m} \cdot 120 \text{ m} = \underline{299,24 \text{ K}} \end{aligned}$$

Für den auf Normal Null reduzierten Luftdruck folgt somit:

$$p(\text{NN}) = 1006,1 \text{ hPa} + 1006,1 \text{ hPa} \cdot \left[ e^{\frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 165 \text{ m}}{287 \frac{J}{kgK} \cdot 299,24 \text{ K}}} - 1 \right] = \underline{1025,2 \text{ hPa}}$$

Hierbei wird für die Temperaturschichtung ein konstanter Temperaturgradient (von  $0,65 \text{ K pro } 100 \text{ m}$ ) angenommen.

## 2 Barometrische Höhenmessung

### 2.1 Allgemeine Ausführungen

siehe Beschreibung zum Versuch Barometrische Höhenmessung!

### 2.2 Durchführung des Versuches

#### 2.2.1

Das Thermometer des Hypsometers ist in der Einheit *Millibar* (*mbar*) kalibriert.

#### 2.2.2

Die Ablesegenauigkeit des Hypsometers beträgt  $\pm 0,5 \text{ mbar}$ , die des Aneroidbarometers ebenfalls  $\pm 0,5 \text{ mbar}$  und die Ablesegenauigkeit für die Temperatur beim Assmanschen Aspirationspsychrometer beträgt  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ .

### 2.2.3

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die Messwerte für den Luftdruck, gemessen mit einem Aneroidbarometer und einem Hypsometer, sowie die Messwerte für die Trocken- und Feuchttemperatur, gemessen mit dem Assmannschen Aspirationspsychrometer. Der Ort der Messung ist einmal im Dachniveau des Physikhochhauses und einmal der Vorplatz des Physikhochhauses. Der genaue Messort für das Dachniveau ist beim Hypsometer der Synoptikraum im 13. Stock des Gebäudes, während er für das Aneroidbarometer und das Assmannsche Aspirationspsychrometer das Flachdach des Gebäudes ist.

	Dachniveau des Physikhochhauses	Vorplatz des Physikhochhauses
$p_{Aner.}$	$(1004 \pm 0,5) \text{ mbar}$	$(1013 \pm 0,5) \text{ mbar}$
$p_{Hyps.}$	$(1013 \pm 0,5) \text{ mbar}$	$(1009,5 \pm 0,5) \text{ mbar}$
$\vartheta_{\text{trocken}}$	$(27,4 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$	$(25,7 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$
$\vartheta_{\text{feucht}}$	$(15,0 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$	$(14,7 \pm 0,1) \text{ }^\circ\text{C}$

### 2.2.4

Um mittels eines Theodoliten die Höhe  $h$  eines Gebäudes zu bestimmen benötigt man den Abstand  $d$  des Theodoliten von dem Gebäude, die Höhe  $h'$  des Theodoliten vom Boden, sowie den Winkel  $\alpha$  unter dem die Spitze des Gebäudes am Theodoliten erscheint.

Für die Bestimmung der Höhe des Physikhochhauses ergeben sich folgende Werte:

$$d = (38,30 \pm 0,10) \text{ m}$$

$$h = (1,20 \pm 0,01) \text{ m}$$

$$\alpha_1 = 55,2^\circ \pm 0,1^\circ$$

Zur Bestimmung der Höhe des Seminarraumes ergibt sich ein abweichender Winkel ( $\alpha_2$ ):

$$\alpha_2 = 51,8^\circ \pm 0,1^\circ$$

## 2.3 Fragen und Aufgaben

### 2.3.1

Das Funktionsprinzip eines Hypsometers ist die Tatsache, dass der Sättigungsdampfdruck über einer ebenen Fläche reinen (destillierten) Wassers nur von der Temperatur abhängig ist. Eine Flüssigkeit beginnt genau dann zu sieden, wenn ihr Sättigungsdampfdruck gerade dem Luftdruck entspricht. Somit ist der Luftdruck eine Funktion des Siedepunktes.

Ein Hypsometer besteht aus einem Thermometer, das die Temperatur des Dampfes über siedendem destilliertem Wasser misst.

### 2.3.2

Das Hypsometer ist ein Absolutinstrument, da es nicht kalibriert werden muss.

### 2.3.3

Zur Herleitung der barometrischen Höhenformel geht man von der hydrostatischen Grundgleichung aus:

$$dp = -g \cdot \rho_L \cdot dz \quad (24)$$

Hierbei ist  $p$  der Luftdruck,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\rho_L$  die Dichte trockener Luft und  $z$  die Vertikalkoordinate.

Zur Bestimmung der Luftdichte  $\rho_L$  verwendet man die Gasgleichung (für trockene Luft):

$$p = \rho_L \cdot R_L \cdot T \quad (25)$$

Hierbei ist  $R_L$  die spezifische Gaskonstante für trockene Luft und  $T$  die Temperatur (der trockenen Luft).

Somit erhält man nach Auflösen nach  $\frac{dp}{p}$ :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_L \cdot T} \cdot dz \quad (26)$$

Nun wird diese Gleichung integriert:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g}{R_L \cdot T} \cdot dz \quad (27)$$

Hieraus ergibt sich unter der Annahme, dass die Temperatur  $T$  und die Erdbeschleunigung  $g$  nicht von der Höhe  $z$  abhängig sind:

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = - \frac{g \cdot z}{R_L \cdot T} \quad (28)$$

Der Fehler, der bei diesen Annahmen gemacht wird, liegt im vernachlässigbaren Bereich.

Für die Höhenabhängigkeit des Luftdruckes folgt schließlich:

$$\underline{p_1 = p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{g \cdot z}{R_L \cdot T}}} \quad (29)$$

Da diese Formel nur für trockene Luft gilt, muss für die Anwendung dieser Formel für die Temperatur  $T$  die virtuelle Temperatur  $T_v$  eingesetzt werden, für die gilt:

$$T_v = T \cdot (1 + 0,64 \cdot q) \quad (30)$$

Hierbei ist  $T$  die wahre Lufttemperatur und  $q$  die spezifische Feuchte.

### 2.3.4

Die Gleichung (26) kann auch in Form einer Zahlenwertgleichung angegeben werden.

Dazu wird diese Gleichung integriert:

$$\int_{z_0}^z dz = - \int_{p_0}^p \frac{R_L \cdot T}{g \cdot p} \cdot dp = - \frac{R_L \cdot T}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} \quad (31)$$

Somit für die Höhe in Abhängigkeit des Luftdruckes:

$$z(p_1) - z(p_0) = \Delta z = \frac{R_L \cdot T}{g} \cdot \ln \frac{p_0}{p_1} = \quad (32)$$

$$= \Delta z = \frac{R_L \cdot T}{g} \cdot \ln 10 \cdot (\lg p_0 - \lg p_1) \quad (33)$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte  $R_L = 287 \frac{J}{kgK}$ ,  $T = 273 K$  und  $g = 9,806 \frac{m}{s^2}$  ergibt sich die Zahlenwertgleichung:

$$\Delta z = 18400 \cdot (\lg p_0 - \lg p_1) \quad (34)$$

Hierbei ergibt sich  $\Delta z$  in Metern.

Die Einheit des Druckes muss für  $p_0$  und  $p_1$  gleich, kann aber ansonsten beliebig gewählt werden, da sich die Einheiten der beiden Druckgrößen gegeneinander kürzen.

### 2.3.5

Mit Hilfe der Gleichung (29) lässt sich der Druck im Niveau der Zugspitze berechnen.

Gegeben ist sind Höhe  $z_0$  des Bezugsortes:  $z_0 = 122 \text{ m}$ ,

sowie die Höhe  $z$  der Zugspitze:  $z = 2962 \text{ m}$ .

Hieraus ergibt sich eine Höhendifferenz von  $z = 2840 \text{ m}$ .

Die Temperatur des Bezugsortes ist  $T_0 = 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$ .

Der Temperaturgradient beträgt  $0,65 \text{ K pro } 100 \text{ m}$ .

Somit errechnet sich für die Zugspitze eine Temperatur von

$$T_1 = 293,15 \text{ K} - 0,65 \text{ K} \cdot \frac{2962}{100} = 274,7 \text{ K}.$$

Hieraus ergibt sich für die Mitteltemperatur  $T = 283,9 \text{ K}$ .

Durch Einsetzen der Werte erhält man für den Luftdruck im Niveau der Zugspitze:

$$p = 1013 \text{ hPa} \cdot e^{\frac{9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2840 \text{ m}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 283,9 \text{ K}}} = \underline{719,8 \text{ hPa}}$$

Für die Berechnung des Siedepunktes in einer Höhe von  $2962 \text{ m}$  verwendet man die Näherungsformel für das Hypsometer:

$$\vartheta = 100,0 + 2,766 \cdot 10^{-2} \cdot (p - 1013,25) - 1,24 \cdot 10^{-5} \cdot (p - 1013,25)^2 \quad (35)$$

Durch Einsetzen des Wertes  $p = 719,8 \text{ hPa}$  in diese Gleichung ergibt sich für die Siedetemperatur:

$$\underline{\vartheta = 90,8^\circ\text{C}}$$

## 2.4 Auswertung der Messungen

### 2.4.1

Aus den Werte für die Trocken- und die Feuchttemperatur des Assmannschen Aspirationspsychrometers lassen sich mit Hilfe der Psychrometertafel die Werte für den Dampfdruck  $e$ , die spezifische Feuchte  $q$  sowie die virtuelle Temperatur  $T_v$  bestimmen:

	Dachniveau des Physikhochhauses	Vorplatz des Physikhochhauses
$\vartheta_{\text{trocken}}$	$(27,4 \pm 0,1)^{\circ}\text{C}$	$(25,7 \pm 0,1)^{\circ}\text{C}$
$\vartheta_{\text{feucht}}$	$(15,0 \pm 0,1)^{\circ}\text{C}$	$(14,7 \pm 0,1)^{\circ}\text{C}$
Dampfdruck $e$	8,8 hPa	9,3 hPa
spezifische Feuchte $q$	$5,4 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$	$5,7 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$
virtuelle Temperatur $T_v$	$28,4^{\circ}\text{C}$	$26,8^{\circ}\text{C}$

### 2.4.2

- a) Die Höhe des Dachniveaus  $h'$  des Physikhochhauses ergibt sich aus den Theodolitwerten zu:

$$h' = h + d \cdot \tan \alpha_1 = 1,20 \text{ m} + 38,30 \text{ m} \cdot \tan 55,2^{\circ} = 56,31 \text{ m}$$

- b) Analog ergibt sich die Höhe des Seminarraumes zu:

$$h' = h + d \cdot \tan \alpha_2 = 1,20 \text{ m} + 38,30 \text{ m} \cdot \tan 51,8^{\circ} = 49,87 \text{ m}$$

### 2.4.3

Zur Höhenbestimmung eines Gebäudes mit Hilfe eines Barometers verwendet man Gleichung (32):

Hiermit ergibt sich für die Höhe des Physikhochhauses aus der Luftdruckmessung mit dem Aneroidbarometer:

$$\Delta z = \frac{R_L \cdot T_v}{g} \cdot \ln \frac{1013 \text{ hPa}}{1007 \text{ hPa}} = 52,29 \text{ m}$$

Analog wird nun noch die Höhe des Seminarraumes mit Hilfe des Aneroidbarometers und des Hypsometers bestimmt:

Aneroidbarometer:

$$\Delta z = \frac{R_L \cdot T_v}{g} \cdot \ln \frac{1013 \text{ hPa}}{1008 \text{ hPa}} = 43,55 \text{ m}$$

Hypsometer:

$$\Delta z = \frac{R_L \cdot T_v}{g} \cdot \ln \frac{1009,5 \text{ hPa}}{1004 \text{ hPa}} = 48,08 \text{ m}$$

Hierbei wird jeweils die mittlere virtuelle Temperatur  $T_v = 27,6^\circ C = 300,75 K$  eingesetzt.

Die Werte sind bei den Luftdruckmessung deutlich ungenauer als bei den Theodolitmessungen. Ursache hierbei sind die größeren Messungenauigkeiten bei den Luftdruckmessungen.

#### 2.4.4

Wenn man die Feuchte nicht berücksichtigt, also anstelle der virtuellen Temperatur  $T_v$  die Lufttemperatur  $T_L$  eingesetzt wird, so beträgt der Fehler  $F$ :

$$F = 1 - \frac{\Delta z(T_v)}{\Delta z(T_L)} = 1 - \frac{52,11 m}{52,29 m} = 0,34 \%$$